Modeliranje linearnom funkcijom u osnovnoj školi

Ivan Nađ
Visoko učilište Algebra, Zagreb, Hrvatska; Fakultet hrvatskih studija, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Hrvatska;
Osnovna škola Eugena Kvaternika, Velika Gorica, Hrvatska
ivan.nadjzg@gmail.com ; inad@racunarstvo.hr ; inad@hrstud.hr

***Sažetak* - Funkcija je jedan od temeljnih pojmova u matematici. Učenici se već u osnovnoj školi susreću s funkcijama, ponajviše u sedmom razredu i to s linearnom ovisnosti, tj. linearnom funkcijom. Linearna funkcija je obrađena na način na koji se učenici na nastavi susreću s njom, a dani su i različiti primjeri zadataka iz svakodnevnog života koji se mogu modelirati linearnom funkcijom. Pritom se pri modeliranju i analizi koristi alat dinamične geometrije Geogebra.**

Ključne riječi - linearna funkcija; linearna ovisnost; modeliranje; Geogebra

I. FUNKCIJA I MODELIRANJE

Funkcija je jedan od temeljnih pojmova u matematici. U osnovnoj školi, odnosi se na pridruživanje jedne veličine drugoj po nekom pravilu ili pak na ovisnost jedne veličine o drugoj. S obzirom da je pojam (linearne) funkcije nekad teško objasniti učenicima, u osnovnoj školi se ostaje na pojmu (linearne) ovisnosti, tj. ovisnost jedne veličine $f(x)$ o drugoj veličini x.

Konkretnije, što se linearne ovisnosti tiče, to je, prema [1], pridruživanje koje nekom realnom broju x pridružuju realni broj $f(x)$ takav da je $f(x) = a \cdot x + b$. Iako se tako ne imenuju, učenici se s različitim pridruživanjima, tj. funkcijama, učenici susreću već od nižih razreda, a da toga nisu niti svjesni. Primjerice, računanje opsega kvadrata ako je zadana duljina stranice, razni zadaci iz svakodnevnog života kao što su cijene artikala, plaće i slično.

Već ovi nabrojani primjeri su zapravo vrlo prikladni primjeri matematičkog modeliranja, odnosno, prema [1], pronalaska i korištenja matematičkog modela, algoritma ili formule za rješavanje nekog realnog, tj. svakodnevnog problema.

II. ZAŠTO I KAKO MODELIRANJE?

S matematičkim modeliranjem važno je krenuti s učenicima što ranije. Tako učenicima približavamo matematiku kao nešto što nije samo apstraktno, već i nešto što svakodnevno koriste. Učenici tako imaju priliku primijeniti stečena matematička znanja i vještine pri rješavanju nekog stvarnog problema, pogotovo ako su ti problemi njima poznati i bliski, što zasigurno osigurava veću motivaciju za rad.

To je posebno bitno ako pogledamo neka istraživanja koja su analizirala stav učenika prema matematici u osnovnoj školi. Benček, Marenić [2] su 2006. godine na 374 učenika osmih razreda, deset osnovnih škola u gradu Zagrebu ustvrdile da se 81.6% učenika na nastavi matematike dosađuje. Tek 15% učenika je reklo da matematiku uče radi zanimljivosti sadržaja. Uključivanje učenicima zanimljivih sadržaja i njima bliskih problema, a što je kroz modeliranje vrlo lako napraviti, je stoga ključno za motivaciju učenika, a na kojoj leži angažman te, u konačnici, i uspjeh u matematici.

Provesti modeliranje na nastavnom satu može biti vrlo zahtjevno, no ne treba od njega odustati, baš zbog spomenute motivacije. Često sam i sam svjedok bezvoljnosti i nemotiviranosti učenika, pogotovo ako se nastava svede na monotono slušanje i prepisivanje s ploče. Nadalje, nastavnici su često opterećeni količinom sadržaja koje moraju obraditi s učenicima te se često žale da ih nedostatak vremena sputava u ovakvim procesima. Poprilično utjecaj imaju i aktivnosti razreda koje dodatno smanjuju broj nastavnih sati na matematici, kao što su maturalna putovanja, terenske nastave, projektni dani, razni drugi nenastavni dani u nastavi i slično. Zbog svega toga, jako nam je teško planirati nastavu, dostupan fond sati se smanjuje, često smo u nedostatku vremena pa je prirodan strah od svega što traje duže vrijeme, a tu je onda i modeliranje, pogotovo jer se često ovakvi zadaci i aktivnosti odužе i potraju cijeli školski sat, a ishod je, ako niti razred niti mi kao nastavnici nemamo iskustva s ovakvim oblikom nastave, prilično neizvjestan.

Nastavnici se moraju i jako dobro pripremiti i to ne samo što se tiče materijala, nego i samog procesa. Ako vidimo da nam ishod sata neće biti ostvaren, bitno je znati se prilagoditi i krenuti barem prema djelomičnom ostvarenju ishoda sata i završiti sat.

Iako je, koliko god ih dobro poznavali, nekad teško predvidjeti reakciju učenika, bitno je i pokušati prilagoditi ciljeve i aktivnosti učenicima, njihovom uzrastu i sposobnostima, što je više moguće individualno ili ih podijeliti u homogene grupe. Upute učenicima moraju biti jasne i nedvosmislene, a nastavnik kao vođa nastavnog procesa mora vrlo aktivno usmjeravati učenike pri svakom koraku, pogotovo jer su učenici često skloni prepustiti posao nekome drugome u grupi. Kao što sam već spomenuo, na početku će zasigurno biti problema, takav rad s učenicima će vjerojatno trajati nešto duže, no s vremenom učenici prihvate ovakvo odvijanje nastavnog procesa te sve ide brže i efikasnije. Za nastavnika je vrlo bitna i samoevaluacija, ali i evaluacija od strane učenika kao mjerilo onoga što se i kako htjelo ostvariti, ali i kao pomoć za buduće planiranje ovakvih aktivnosti.

III. LINEARNA OVISNOST U KURIKULUMU

Učenici se u osnovnoj školi, prema Kurikulumu matematike za osnovne škole [3], prvi put s funkcijom (konkretno linearnom ovisnosti) susreću u 7. razredu. S obzirom da i sam ishod učenja vezan uz linearnu ovisnost naglašava da je riječ o primjeni linearne ovisnosti, naglasak tog sadržaja nije na algoritmima i tehnici rješavanja, nego na povezivanju, učenikovom logičkom razmišljanju i sposobnosti rješavanja problema, ponajviše onda i na modeliranju problema. Preporuča se koristiti i programe dinamične geometrije, od kojih je među najzastupljenijima Geogebra pa će kroz rad biti dani i primjeri kako nam upravo Geogebra može pomoći u tome.

IV. ŠTO JE GEOGEBRA?

Geogebra je dinamični matematički alat koji se može koristiti u različitim kontekstima i na različite načine u nastavi. Najčešće se koristi kao alat dinamične geometrije zbog svoje interaktivnosti i prilagodljivosti. Osim geometrije, često se koristi i za izradu raznih tablica, ali i statistiku i diferencijalni račun. U njoj se mogu kreirati i razni kvizovi i ankete. Nudi i mogućnost kreiranja virtualnih učionica. Vrlo je intuitivna i lako se mogu naučiti njezine najosnovnije funkcije. Ima odličnu podršku s vrlo detaljnim vodičima o mogućnostima korištenja svake od funkcija, ali i forume i online zajednice u kojima možete saznati odgovore na većinu svojih pitanja ili pomoći drugim korisnicima s njihovima. Može se koristiti mrežno kroz gotovo sve preglednike, ali i izvanmrežno jer se nudi i kao besplatni računalni program.

V. LINEARNA OVISNOST U NASTAVI

Učenici najprije kreću sa sadržajima koji se temelje na zapisu $f(x) = ax$. Sami zapis vrlo lako možemo otkriti s učenicima popunjavanjem jednostavnih tablica, kao što su, primjerice, Tablica I. i Tablica II. U Tablici I. učenici uočavaju ovisnost duljine u cm o duljini u metrima i zapisuju kao linearnu ovisnost $f(x) = 100x$. U Tablici II., učenici uočavaju ovisnost dubine na koju podmornica može zaroniti o vremenu te također i tu linearnu ovisnost zapisuju formulom, u ovom slučaju $f(x) = -45x$.

Bitno je s učenicima raspraviti što se čemu pridružuje, primjerice duljini u metrima se pridružuje duljina u centimetrima, a vremenu u minutama se pridružuje dubina u metrima. O tome je bitno raspraviti radi sami linearne ovisnosti, tj. razumijevanja učenika što će biti veličina/varijabla x , a što veličina/varijabla $f(x)$, a što je pak bitno radi same primjene formule i modeliranja njome jednom kada do nje dođemo. Pri spomenu naziva linearne ovisnosti, učenici često pitaju što znači „linearna“ i tu možemo komentirati da dolazi od latinske riječi „linea“ što znači pravac/crta.

Duljina (m)	1	2	3	10	50	200	x
Duljina (cm)	100						

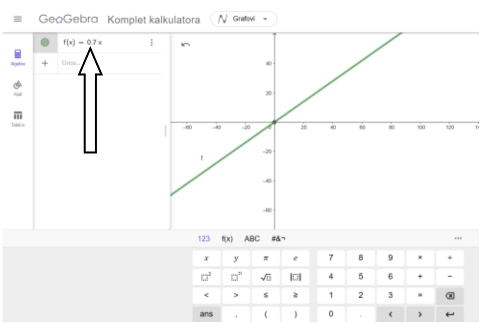
TABLICA I.

Vrijeme(min)	5	1	3	5	8.5	50	x
Dubina (m)	-225						

TABLICA II.

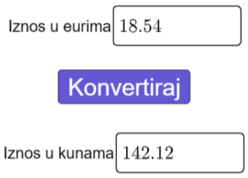
Ovdje je važno s učenicima raspraviti i da je ovdje zapravo riječ o proporcionalnosti dviju veličina, a koju oni u pravilu rade u sedmom razredu prije linearne ovisnosti. Važno je povezati s proporcionalnosti jer se zadaci iz te teme u velikoj mjeri temelje na problemima iz realnog svijeta, a koji su njima bliski pa je prijelaz na zadatke s modeliranjem utoliko lakši.

Već je od ovog prvog zapisa bitno s učenicima crtati kako bi učenici i sa samog grafičkog prikaza mogli zaključiti nešto o ovisnosti dviju veličina, primjerice povećava li se jedna veličina povećanjem druge veličine ili se smanjuje, kako nagib pravca utječe na to koliko brzo raste/pada veličina $f(x)$, kako promjena koeficijenta *a* utječe na grafički prikaz i slično. Grafički prikaz također možemo vrlo lako učenicima prikazati u Geogebri. Tu je Geogebra sjajna jer se grafički prikaz automatski prilagođava formuli o kojoj je riječ, a koju je vrlo lako mijenjati kao što je prikazano na Slici 1. Učenici uočavaju da se promjenom koeficijenta a mijenja nagib i da je to njegov utjecaj na grafički prikaz linearne ovisnosti.



Slika 1. Prikaz promjene koeficijenta *a* u alatu Geogebra

Modelirati ovakvim zapisom možemo problem koji je vrlo aktualan u ovo vrijeme, a to je konverzija eura u kune i obrnuto. Učenicima dajemo svakodnevan i njima blizak problem koji će zasigurno biti motivirani rješavati. Možemo krenuti od, primjerice, konvertiranja eura u kune. Najprije ih motiviramo tako da sami predlože primjere iznosa u eurima koje onda kalkulatorom u Geogebri, kao što je na Slici 2., konvertiramo. U matematici je izuzetno bitna procjena pa ih je dobro prije konverzije pitati za procjenu približne vrijednosti iznosa u kunama. Nakon nekoliko primjera, možemo zajedno s njima doći do formule linearne ovisnosti $f(x) = 7.53450x$.



Slika 2. Kalkulator konverzije u Geogebri

Kako dobar dio učenika želi zarađivati putem društvenih mreža ili kreiranjem i objavom vlastitih sadržaja, zanimljiv bi im sigurno bio i zadatak s računanjem zarade od pregleda videa. Učenike možemo i pitati što misle gdje je tu zapravo zarada (u pregledu reklama). U Geogebri vrlo lako možemo izraditi kalkulatore zarade kao na Slici 3., a koje možemo koristiti prilikom rješavanja zadataka.

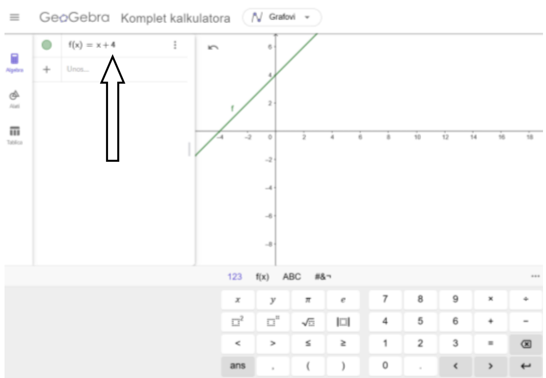
Slika 3. Kalkulator zarade na Youtube-u u kategoriji Gaming, u alatu Geogebra

Nakon zapisa $f(x) = ax$, prirodno je krenuti na $f(x) = x + b$. Do zapisa opet vrlo lako možemo doći popunjavajući tablice kao što je, primjerice, Tablica III. U njoj učenici uočavaju ovisnost iznosa u štednoj kasici o broju proteklih dana (ako svaki dan ubacuje po 1 euro) te zapisuju danu linearnu ovisnost formulom $f(x) = x + 4$.

Broj dana	0	1	2	3	5	20	x
Iznos u eurima	4						

TABLICA III.

Naravno, i ovdje je grafički prikaz bitan kako bi učenici mogli povezati kako promjena koeficijenta b utječe na grafički prikaz. Tu je također Geogebra sjajna kao i u prijašnjem zapisu, a sama promjena zapisa je prikazana na Slici 4. Učenici uočavaju da se promjenom koeficijenta b pomiče gore ili dolje točka u kojoj grafički prikaz presijeca os y te da je to njegov utjecaj na grafički prikaz linearne ovisnosti.



Slika 4. Prikaz promjene koeficijenta *b* u alatu Geogebra

U Geogebri učenici mogu za prethodni primjer sa štednjom izraditi i kalkulator koji bi im prikazivao ušteđeni iznos u odnosu na broj proteklih dana, tjedana, mjeseci ili koju god jedinicu vremena odabrali, pod uvjetom da u svakoj jedinici vremena ubacuju po 1 euro. Primjer takvog kalkulatora je prikazan na Slici 5.

Slika 5. Kalkulator štednje u Geogebri

Učenicima je problematika aktualna jer mogu, primjerice, izračunati koliko bi im jedinica vremena trebalo da uštede za nešto što si žele kupiti. Iako je ovo primjer koji se vrlo lako može i računski riješiti, jako je praktičan za ovladavanje upotrebom Geogebre. I tu je izuzetno bitna uloga nastavnika kao voditelja procesa s ulogom usmjeravanja. Jednom kada izrade ovakav kalkulator, vrlo je lako izraditi kalkulator s uplatama koje nisu samo po 1 euro u jedinici vremena.

Na samom kraju, s učenicima se radi zapis linearne ovisnosti $f(x) = ax + b$. Vrlo prirodno i lako možemo prijeći na ovaj zapis s prošlog ako, već spomenuti prethodni primjer sa štednjom, samo djelomično izmijenimo tako da uplate po jedinici vremena, npr. po danu, više nisu 1 euro nego proizvoljni iznos, primjerice 0.50 eura po danu. Učenici opet mogu popunjavati tablice kao što je Tablica III., no ovaj put primjećuju da je zapis ponešto drugačiji i da glasi $f(x) = 0.50x + 4$. Opet je bitna rasprava, primjerice koliko bi im trebalo da uštede određeni iznos, što da su uplate tjedne, a ne dnevne, što ako promijenimo koeficijente u zapisu i slično. Sama ta promjena koeficijenata i njen utjecaj na graf se vrlo lako opet može prikazati u Geogebri.

Vrlo česti primjer modeliranja primjenom ovog zapisa je račun cijene taksi prijevoza. Učenicima je dovoljno reći koliko košta početak vožnje, tj. dio koji je u svaki vožnji fiksan, a kolika je cijena po kilometru. Važno je da učenici uoče da je taj fiksni dio, tj. naknada za početak vožnje zapravo koeficijent b, a cijena po kilometru koeficijent a. Učenici mogu isprobati izračunati cijenu vožnje bez korištenja zapisa linearne ovisnosti, ali i korištenjem zapisa. Dobro je ne stati samo na računanju cijene vožnje, nego dodati i, primjerice, pitanje koliku bismo udaljenost mogli prijeći za određeni iznos novca. Kontekst se može promijeniti i ako se promijeni smisao koeficijenta a pa on više ne označava cijenu po kilometru, nego po, primjerice, minuti. S učenicima je onda zanimljivo raspraviti što bi im se više isplatilo u kojem dijelu dana, primjerice za vrijeme velikih gužvi. Zadatak možemo još malo otežati ako u fiksnu naknadu za početak vožnje dodamo i gratis kilometre uključene u cijenu vožnje, ili pak uvećanje cijene u razdoblju povećanje potražnje te dodati raspravu kako bi taj dio utjecao na zapis linearne ovisnosti. Još ako u zadatku iskoristimo stvarne naknade nekog od prijevoznika, učenici mogu koristiti i njihove aplikacije kako bi provjerili točnost svojih rješenja.

Prirodan nastavak toga je i projekt u kojem bi učenici mogli napraviti istraživanje o cijenama svakog od prijevoznika i za svakog od njih doći do zapisa linearne ovisnosti. Možemo uspoređivati i sa cijenama u drugim državama, računati i zaradu vozača, uračunavati troškove vožnje itd., mogućnosti su gotovo pa neograničene.

VI. Zaključak

Matematika je često učenicima previše apstraktna i učenici ju često ne razumiju pa se na nastavi, što su i istraživanja pokazala, dosađuju i nedostaje im motivacije za učenje. Stoga je bitno pokušati matematiku što je više moguće približiti učenicima svakodnevnim problemima, problematikom koja je njima zanimljiva. Tu može jako dobro poslužiti matematičko modeliranje jer učenici rješavaju svakodnevne probleme koristeći matematička znanja i vještine. Koristiti možemo i alate dinamične geometrije, kao što je Geogebra, da se odmaknemo od tradicionalnog rješavanja na ploči i u bilježnici. Za takvu nastavu se nastavnik mora dobro pripremiti i očekivati, barem na početku, teškoće s provedbom, no nakon vremena će se učenici priviknuti i modeliranje će biti bolje. Ako već i samo nekoliko učenika iz razreda bude motiviranije za matematiku, cilj je opravdao sredstva.

Literatura

[1] https://repozitorij.mathos.hr/islandora/object/mathos%3A413/datastream/PDF/view (preuzeto 30.1.2023.)

[2] A. Benček, M. Marenić, „Motivacija učenika osnovne škole u nastavi matematike“, Školske novine, Zagreb 2006.

[3] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, “Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj”, Narodne novine NN 7/2019, Zagreb, 2019.

[4] M.Perić, K.Golubić, D.Vrdoljak, H.Frančešević, S.Davidović , „Linearna funkcija, modeliranje linearnom funkcijom i aritmetički niz” seminar, PMF matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, mentor : Aleksandra Čižmešija

[5] Bender, E.A., „An Introduction to Mathematical Modeling”, New York: Dover, 1978.

[6] Gershenfeld, N., „The Nature of Mathematical Modeling”, Cambridge University Press, 1998.